ECOLE POLYTECHNIQUE — OPTION M'

CONCOURS D'ADMISSION 1981

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 heures)

Pour trouver, à l'intérieur d'une sphère de rayon 1 ne contenant aucune charge électrique, l'expression d'un potentiel électrostatique ne dépendant que de la distance au centre de la sphère et de la distance à un diamètre, l'emploi de coordonnées sphériques conduit, par un calcul qu'on ne demande pas de justifier, à la recherche de fonctions numériques u définies et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1[\times [0,\pi]$ telles que, en tout point (r,θ) de cet ensemble on ait

$$E \quad : \quad r \sin\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\, u(r,\theta)) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial \theta} \sin\theta \right) = 0 \ .$$

C'est cette dernière recherche qui fait l'objet du problème.

I

Dans cette partie, on se propose de chercher des solutions u de l'équation E différentes de la constante nulle et définies pour tout $(r,\theta) \in [0,1[\times [0,\pi]$ par $u(r,\theta) = \alpha(r)\,\beta(\theta)$ où les fonctions numériques α et β sont de classe $\mathcal{C}^2$ respectivement sur $[0,1[$ et $[0,\pi]$.

1 - a - Montrer que si u vérifie toutes ces conditions, il existe un réel λ tel que α et β soient respectivement solutions des équations différentielles

$$E_1 \ : \ r(r\alpha)'' - \lambda\alpha = 0 \ ; \qquad E_2 \ : \ (\beta' \sin\theta)' + \lambda \beta \sin\theta = 0 \ .$$

b - Intégrer l'équation E_1 sur $[0,1[$ (on pourra, pour $r \neq 0$, utiliser le changement de variable $r = e^t$). Compte tenu des conditions de continuité imposées à α, quelles sont les valeurs autorisées de λ et la forme des solutions α correspondantes ?

2 - a - En posant $x = \cos\theta$, montrer que la recherche des solutions sur $]0,\pi[$ de l'équation E_2 équivaut à la recherche des solutions sur $]-1,1[$ de l'équation

$$E_3 \ : \ (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \ .$$

b - Trouver les solutions de E_3 sur $]-1,1[$ développables en série entière sur cet intervalle. E_3 admet-elle d'autres solutions sur $]-1,1[$?

c - Pour quelles valeurs de λ l'équation E_3 admet-elle des polynômes pour solutions ? Quel est, en fonction de λ, le degré de ces polynômes ? Vérifient-ils des conditions de parité ?

3 - Vérifier que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n défini par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] \quad \text{si} \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad P_0(x) = 1$$

.../...

est une solution de E_3 sur $\mathbb{R}$ pour $\lambda = n(n+1)$.

4 - a - Soient q un polynôme à coefficients réels, x et y deux nombres réels et n un entier strictement positif. Etablir l'égalité

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\, q(x + iy\, e^{it})\, dt = \frac{2\pi (iy)^n}{n!}\, q^{(n)}(x) .$$

En posant $p_n(x) = (x^2 - 1)^n$, en déduire une expression de $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\, p_n(x + iy\, e^{it})\, dt$ à l'aide de y et de $P_n(x)$.

b - Si de plus $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$, vérifier l'égalité

$$(x + iy\, e^{it})^2 - 1 = 2\, e^{it} \sin\theta\, (i\cos\theta - \sin\theta \cos t)$$

et établir, pour tout $x = \cos\theta \in [-1, 1]$ et tout entier $n \geq 0$, l'égalité

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i \sin\theta \cos t)^n\, dt .$$

5 - a - Calculer numériquement $\sup_{(n,x) \in \mathbb{N} \times [-1,1]} |P_n(x)|$.

b - En utilisant (sans les démontrer) les inégalités $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $1 - \rho \leq e^{-\rho}$ pour $\rho \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un réel C tel que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in]-1, 1[$, on ait $|P_n(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{n(1 - x^2)}}$.

II

Le but de cette partie est d'obtenir toutes les solutions u caractérisées au début de la partie I, dont on conserve les notations.

1 - a - Pour tout entier $n \geq 1$, et tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\frac{d^2}{dx^2}[(x^2 - 1)^{n+1}]$ en fonction de $(x^2 - 1)^n$ et de $(x^2 - 1)^{n-1}$. En convenant que la dérivée d'ordre 0 d'un polynôme est ce polynôme lui-même, en déduire une expression de $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(x^2 - 1)^n]$ comme combinaison linéaire de P_{n+1} et de P_{n-1}.

b - Trouver une expression de $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(x^2 - 1)^n]$ comme combinaison linéaire de P_{n+1} et de $x P_n$ et déduire de ce qui précède, pour tout entier $n \geq 1$, la relation

.../...

$$(n+1)\,P_{n+1} - (2n+1)\,x\,P_n + n\,P_{n-1} = 0 \quad .$$

2 - Pour tout couple (f, g) de fonctions numériques continues sur $[-1, 1]$, on pose

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx \, .$$

a - Calculer $(P_m \mid P_n)$ pour $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ avec $m \neq n$.

b - Que vaut $(P_0 \mid P_0)$? Pour tout entier $n \geqslant 1$, comparer $(x P_n \mid P_{n+1})$ avec $(P_{n+1} \mid P_{n+1})$, puis $(x P_{n+1} \mid P_n)$ avec $(P_n \mid P_n)$, et en déduire la valeur de $(P_n \mid P_n)$.

c - Calculer $\left(\sqrt{m+\frac{1}{2}}\, P_m \mid \sqrt{n+\frac{1}{2}}\, P_n\right)$ pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

d - En posant $c_n = \sqrt{n+\frac{1}{2}}\,(f \mid P_n)$, montrer que la série de terme général c_n^2 converge.

3 - On suppose que la fonction numérique f est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x réel,

$$a_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)(f \mid P_n) \qquad \text{et} \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, P_k(x) \, .$$

a - Quelle est la limite de la suite $\left(a_n / \sqrt{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$?

b - Montrer que, pour tout x réel, il existe une fonction $t \longmapsto K_n(x, t)$ continue sur $\mathbb{R}$ et égale, pour $t \neq x$, à

$$K_n(x, t) = \frac{n+1}{2}\, \frac{P_{n+1}(t)\, P_n(x) - P_{n+1}(x)\, P_n(t)}{t - x} \, .$$

c - Etablir l'égalité $S_n(x) = \int_{-1}^{1} K_n(x, t)\, f(t)\, dt$. Que devient cette égalité si on remplace f par la constante 1 ?

d - Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

.../...

4 - a - On se propose d'intégrer l'équation E_3 sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit φ une solution de E_3 sur $[-1, 1]$. Calculer en fonction de φ P_n la dérivée de la fonction $x \longmapsto (1 - x^2)\,[P_n(x)\,\varphi'(x) - P_n'(x)\,\varphi(x)]$; en déduire la valeur de $(\varphi \mid P_n)$ si λ est différent de $n(n+1)$ puis, dans tous les cas, la valeur de φ.

b - Quelles sont toutes les solutions u de l'équation E de la forme $u(r, \theta) = \alpha(r)\,\beta(\theta)$ sur $[0, 1[\times [0, \pi]$ telles que α et β soient de classe $\mathcal{C}^2$ respectivement sur $[0, 1[$ et $[0, \pi]$?

III

Cette partie a pour objet d'obtenir de nouvelles solutions u de E.

1 - a - Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer P_n linéairement en fonction de P'_{n+1} et P'_{n-1} et en déduire une expression de P'_n linéaire en fonction des P_k d'indices entiers $k \in [0, n-1]$ (on pourra utiliser un résultat de la question II.1.a).

b - En déduire pour $n^{-2}\,|P'_n(x)|$ un majorant simple indépendant de n et de $x \in [-1, 1]$.

c - Trouver pour $n^{-4}\,|P''_n(x)|$ un majorant simple indépendant de n et de $x \in [-1, 1]$.

2 - Soit g une fonction numérique continue sur $[-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = (n + \frac{1}{2})\,(g \mid P_n)$. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, r^n\, P_n(\cos\theta)$ converge pour tout $r \in [0, 1[$ et tout $\theta \in [0, \pi]$ et que sa somme $s(r, \theta)$ est une solution de l'équation E.

3 - En supposant de plus g dérivable sur $]-1, 1[$, exprimer à l'aide de g la limite de $s(r, \theta)$ lorsque r tend vers 1 par valeurs inférieures, θ étant fixé dans l'intervalle $]0, \pi[$ (on pourra admettre que si une série entière d'une variable réelle r a un rayon de convergence égal à 1 et si de plus la série de ses coefficients converge, la somme de cette dernière série est la limite de la somme de la série entière lorsque r tend vers 1 par valeurs inférieures).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail